数理解析研究所講究録
641巻 1988年 280-291

Kostant の generalized exponents と Young 図形.

東大・理 岡田聡一（ Soichi Okada ）
東大・理 松沢淳一（Jun-ichi Matsuzawa)

古典群においては，その表現論的な現象を Young 図形という言葉で言い直すことができます。その結果，古典群の表現論に組合せ論的な側面が出てくるのですが，その一つの例として Kostant の generalized exponents を Young 図形を使って計算する試みを紹介します。

generalized exponents を Young 図形で計算することによって，それまでわからなかった generalized exponents の性質がわかったり，逆に，新しい Young 図形の変形操作のようなものが出てくるというような事があります．既にこの題材に関しては本講究録に報告（[Ma 1]）を出しておりますので，表現論的な背景および概略につきましては，そちらを参照していただき，また詳細につきましては [Ma 2] を参照していただきたいと思います。本稿では [Ma 1] において詳しくふれなかった"prespecialization" という Young 図形の操作を中心に

解説したいと思います。

§1. Generalized exponents の定義.

Gを複素連結reductiveなリー群, $\mathfrak{g}$をそのリー環, Sを$\mathfrak{g}$上の多項式環とする。GのSへの作用を$(g\cdot f)(x):=f(g^{-1}x)$, $(g\in G,\ f\in S,\ x\in\mathfrak{g})$で定める。ここで$g^{-1}\cdot x$はadjoint作用とする. SのG部分加群Hを次のように定義する。

$$H:=\{f\in S \mid \partial\cdot f=0,\ \forall\partial:\mathfrak{g}\text{上の定数係数微分作用素で}, \partial\cdot 1=0 \text{ かつ } \partial\text{の作用は}G\text{作用と可換}\}.$$

Hの元はG調和多項式とよばれ, 通常の調和多項式のリー群への拡張である。S^GをSのG作用に関する不変式環とすると次の定理が成り立つ。

[定理] (Kostant, [Kos])

写像 $S^G\otimes H\to S$ $(f\otimes h\mapsto fh)$ はG加群としての同型を与える。

従ってSのG加群としての構造は, Hのそれを知ればわかることになる. (S^Gの構造はわかっているから.)

さてρをGの有限次元複素既約表現とし, Hのk次同次成分H^kにおけるρの重複度を$[H^k:\rho]$とかき,

$$P_H(\rho,t):=\sum_{k=0}^{\infty}[H^k:\rho]t^k$$

とおくと $p_H(\rho,t)$ は多項式になり，その次数は ρ の最高ウェイトの，単純ルートに関する高さに等しいことがわかっている。([Kos])．

[定義] (Kostant) ρ を G の有限次元複素表現，$\rho=\sum_{i=1}^{k}c_i\rho_i$ を ρ の既約分解とし，$p_H(\rho,t)=\sum_{i=1}^{k}c_i p_H(\rho_i,t)$ とする。$p_H(\rho,t)$ を係数1の単項式の和で書いたとき，即ち

$$p_H(\rho,t)=t^{m_1(\rho)}+t^{m_2(\rho)}+\cdots+t^{m_s(\rho)}$$

としたときの，$m_1(\rho),\cdots,m_s(\rho)$ を ρ に関する generalized exponents という。

たとえば $p_H(\rho,t)=2t^2+t^3=t^2+t^2+t^3$ のとき，その generalized exponents は 2, 2, 3 である。

§2. $GL(n,\mathbb{C})$ の generalized exponents と prespecialization.

$GL(n,\mathbb{C})$ の既約有理表現の同値類と Young 図形のペア (α,β) で $l(\alpha)+l(\beta)\leq n$ となるものの集合とは1対1に対応する。(ここで $l(\alpha)$ は α の長さ)。それを $[\alpha,\beta]_{GL(n)}$ と書くことにすると，α と β の大きさ $(|\alpha|,|\beta|)$ が等しくないときには $p_H([\alpha,\beta]_{GL(n)},t)=0$ となる。等しい時には次が成立する。(詳しくは [Ma1] または [Ma2] 参照)

[定理2.1] α,β を，$|\alpha|=|\beta|$, $l(\alpha)+l(\beta)\leq n$ をみたす Young 図形

とする。

$$P_{GL(n)}([\alpha,\beta]) := \Big\{ (\xi,\eta) \;\Big|\; \cdot\ \xi,\eta \text{ は Young 図形 s.t. } |\xi|=|\eta|$$
$$\cdot\ \pi_{GL(n)}(S_{[\xi,\eta]_\infty}(x,y)) = sgn_{GL(n)}([\xi,\eta])\,\pi_{GL(n)}(S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y))\ ,$$
$$sgn_{GL(n)}([\xi,\eta]) = \pm 1 \Big\}.$$

ここで $\pi_{GL(n)}$ は GL の specialization homomorphism, $S_{[\xi,\eta]_\infty}(x,y)$ は GL の universal character とよばれるもの。([K]. そこでは $[\xi,\eta]_{GL}$ と書かれている)

また、

$$a_k := \sum_{(\xi,\eta)\in P_{GL(n)}([\alpha,\beta])} \ \sum_{\substack{\mu,\tau \\ |\mu|=k \\ \ell(\mu)\le n}} sgn_{GL(n)}([\xi,\eta])\, LR^{\mu}_{\tau,\xi}\, LR^{\mu}_{\tau,\eta} \qquad (k\in\mathbb{Z}_{\ge 0})$$

ここで $LR^{\mu}_{\tau,\xi}$ は Littlewood-Richardson 係数(cf [M])

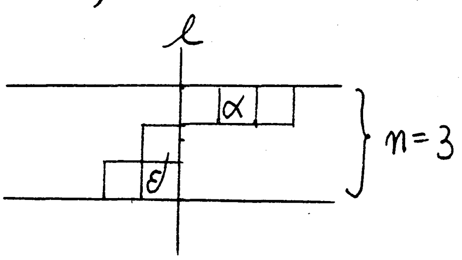
とするとき、

$$P_H([\alpha,\beta]_{GL(n)}, t) = \Big\{\prod_{i=1}^{n}(1-t^i)\Big\}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\Big\}.$$

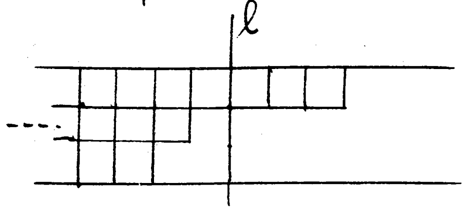
この定理の $P_{GL(n)}([\alpha,\beta])$ を prespecialization とよぶ。この元は以下のようにして求められる。ここでは例で説明する。

$n=3$, $\alpha=(3)=\square\square\square$, $\beta=(2,1)=\begin{smallmatrix}\square&\square\\ \square&\end{smallmatrix}$ とする。

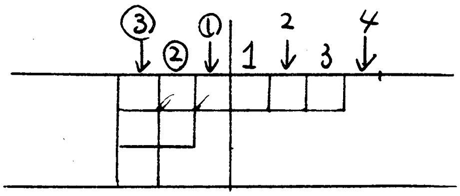
(1) α, β を中央線 ℓ の左右に並べる。ただし β は $180°$ 回転しておく。



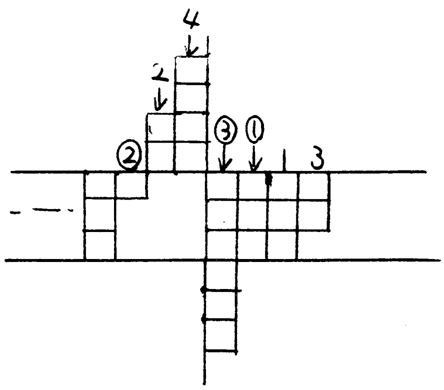
(2) ℓの左側については、βをぬいた部分を考える。



(3) ℓの右側と左側とから、それぞれ同じ数だけの列を任意に選ぶ。ただし右側については、列がない所も0個のますがあると思うことにする。例えば右側から2列と4列を、左側から1列と3列を選んだとする。

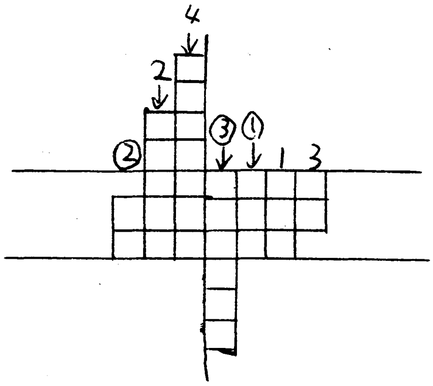


(4) 列どうしを入れかえることにより、選んだ列をそれぞれℓに関して反対側のℓ寄りに運ぶ。このとき各列は右に1つ移動する毎に1つ増え、左に1つ移動する毎に1つ減るとする。ただし、選ばれなかった列の相対的順番と、同じ側にあった選ばれた列の相対的順番は変えないとする。



上にとび出した分はマイナスに数える。

(5) 左側の部分については $n=3$ から各列を引いて Young 図形をつくる。



ℓ の右側を ξ，左側を 180° 回転したものを η とすると，

$$(\xi,\eta)\in\mathcal{P}_{GL(3)}([\text{四},\text{田}]).$$

符号 $\mathrm{sgn}_{GL(3)}(\xi,\eta)$ は以上の操作において列の入れかえの回数を m としたとき $\mathrm{sgn}_{GL(3)}(\xi,\eta)=(-1)^m$.

以上の操作を各 $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ について任意の k 列を選んで行なうと，$\mathcal{P}_{GL(n)}(\alpha,\beta)$ の元が全て求まる。

これをまとめると，以下のようになる。

α,β を $\ell(\alpha)+\ell(\beta)\le n$ をみたす Young 図形とする。α,β の転置図形 (transpose, conjugate) を

$$\bar\alpha=(\bar\alpha_1,\bar\alpha_2,\cdots,\bar\alpha_r),\quad \bar\beta=(\bar\beta_1,\bar\beta_2,\cdots,\bar\beta_s)\quad とする。$$

$$(a_1,a_2,\cdots\cdots)=(\bar\alpha_1,\bar\alpha_2-1,\cdots,\bar\alpha_r-r+1,-r,-r-1,\cdots\cdots)$$

$$(b_1,b_2,\cdots)=(\bar\beta_1,\bar\beta_2-1,\cdots,\bar\beta_s-s+1,-s,-s-1,\cdots\cdots)$$

$$\delta=(0,1,2,\cdots).\quad (いずれも無限列)$$

とおいて，$k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ と自然数列 $(1\le)i_1<i_2<\cdots<i_k$, $(1\le)j_1<j_2<\cdots<j_k$ に対して，Young 図形の対 $g_{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_k}(\alpha,\beta)_n=$

(ξ,η) を

$$\bar{\xi}=(n+1-b_{j_k},\ n+1-b_{j_{k-1}},\ \cdots,\ n+1-b_{j_1},\ a_1,a_2,\cdots,\hat{a}_{i_1},\cdots,\hat{a}_{i_2},\cdots)+\delta.$$

$$\bar{\eta}=(n+1-a_{i_k},\ n+1-a_{i_{k-1}},\ \cdots,\ n+1-a_{i_1},\ b_1,b_2,\cdots,\hat{b}_{j_1},\cdots,\hat{b}_{j_2},\cdots)+\delta.$$

（ $\wedge$ はその数字をぬくことを示す）

で定める。このとき，

[命題 2.2]

$$\mathcal{P}_{GL(n)}([\alpha,\beta])=\left\{ g_{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_k}(\alpha,\beta)_n \;\middle|\; \begin{matrix} k\in\mathbb{Z}_{\geq 0} & 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k \\ & 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k \end{matrix} \right\}$$

$$\mathrm{sgn}_{GL(n)}(g_{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_k}(\alpha,\beta)_n)=(-1)^{k+\sum_{p=1}^{k}(i_p+j_p)}$$

前の例では $g_{2,4,1,3}(\text{田},\text{田})_3=((4,4,3,1,1,1),(3,3,2,2,2,1,1))$

§3. $Sp(2n,\mathbb{C})$ の generalized exponents と prespecialization.

シンプレクティック群 $Sp(2n,\mathbb{C})=\left\{A\in GL(2n,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^tAJA=J,\ J=\begin{pmatrix} & & & & & -1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & -1 & & \\ & & 1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}\begin{matrix}\updownarrow n\\ \updownarrow n\end{matrix}\right\}$ の有限次元複素既約表現の同値類は長さが n 以下の Young 図形と 1 対 1 に対応する。それを $\lambda_{Sp(2n)}$ とかく。（λ は $\ell(\lambda)\leq n$ をみたす Young 図形）．このとき．

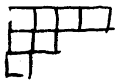
[定理 3.1]

λ を $\ell(\lambda)\leq n$ をみたす Young 図形とする．

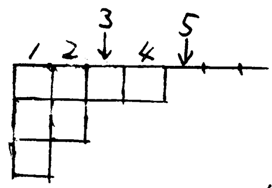
$$P_H(\lambda_{Sp(2n)},t)=\left\{\prod_{i=1}^{n}(1-t^i)\right\}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu\in\rho_{Sp(2n)}(\lambda)}\mathrm{sgn}_{Sp(2n)}(\mu)\left(\sum_{\substack{\kappa,\nu\\|\kappa|=k\\ l(2\kappa)\le 2n}}LR^{2\kappa}_{2\nu,\mu}\right)\right)t^k\right\}.$$

ここで $\rho_{Sp(2n)}(\lambda)=\{\mu\mid \pi_{Sp(2n)}(\mu_{Sp})=\mathrm{sgn}_{Sp(2n)}(\mu)\lambda_{Sp(2n)}\}$.
$\pi_{Sp(2n)}$ は Sp の specialization homomorphism，μ_{Sp} は Sp の μ に対応する universal character．([K-T])．また．Young 図形 $\kappa=(k_1,\cdots,k_r)$ に対し $2\kappa=(2k_1,\cdots,2k_r)$．

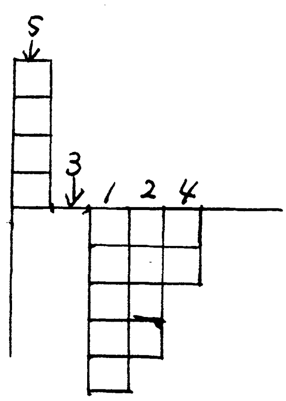
$\rho_{Sp(2n)}(\lambda)$ を λ の prespecialization とよぶ。これは次の操作により求められる。これも例から説明を始めたい．

$n=3$.，$\lambda=(4.2.1)=$ 

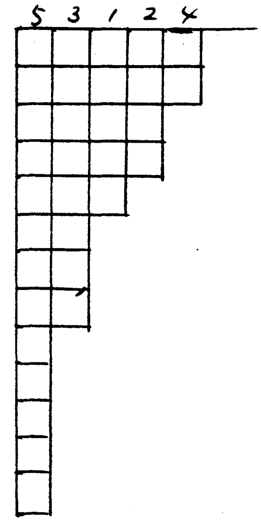
(1) Young 図形 λ の列から任意にいくつかの列を選ぶ。ただし右方向には 0 の列がずっと並んでいると考える。ここでは 3列と 5列を選ぶ。



(2) 選んだ列を左端に寄せ，それを逆順に並べかえる。このとき各列は右に1つ移動する毎に1つ増え左に1つ移動する毎に1つ減る。



(3) 選んだ列については、ますの数を $2n+2=8$ から引く。ただし上にとび出した部分はマイナスとする。



こうして得られた図形を μ とすると

$$\mu \in \mathcal{P}_{Sp(6)}(\lambda).$$

また、(2) での列の入れかえの回数と選んだ列の数の和を s とすると

$$sgn_{Sp(6)}(\mu) = (-1)^{s}.$$

以上をまとめると、

$\overline{\lambda} = (k_1, k_2, \cdots, k_{\lambda_1}, 0, 0, \cdots)$, $\delta = (0, 1, 2, \cdots\cdots)$

$(a_0, a_1, \cdots\cdots) = \overline{\lambda} - \delta = (k_1, k_2 - 1, k_3 - 2, \cdots)$ とする。

整数 $(0 \le) i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ に対し、Young図形 $p^{Sp(2n)}_{i_1 \cdots i_r}(\lambda)$ を、

$$\overline{p^{Sp(2n)}_{i_1, \cdots, i_r}(\lambda)} = (2n+2-a_{i_r},\ 2n+2-a_{i_{r-1}}, \cdots, 2n+2-a_{i_1},\ a_0, a_1, \cdots, \widehat{a_{i_1}}, \cdots \widehat{a_{i_r}}, \cdots) + \delta$$

とする。("$\wedge$" は数字の消去)　このとき、

[命題 3.2]

$$\mathcal{P}_{Sp(2n)}(\lambda) = \{ p^{Sp(2n)}_{i_1, \cdots, i_r}(\lambda) \mid r \ge 0,\ 0 \le i_1 < \cdots < i_r \}$$

$$sgn_{Sp(2n)}\left(p^{Sp(2n)}_{i_1, \cdots, i_r}(\lambda)\right) = (-1)^{r + \sum_{j=1}^{r} i_j}.$$

§4 $SO(m, \mathbb{C})$ の generalized exponents と prespecialization.

$\lambda_{SO(m)}$ ($m = 2n+1$ or $2n$, $\ell(\lambda) \le n$) を Young 図形 λ に対応

する$SO(m,\mathbb{C})$の表現とする。このとき、

［定理4.1］

$$P_H(\lambda_{SO(m)},t)=F(m,t)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu\in P_{SO(m)}} sgn_{SO(m)}(\mu)\left(\sum_{\substack{(\kappa,\nu)\\ |\kappa|=k\\ \ell(2\kappa)\le m}} LR^{\overline{2\kappa}}_{2\nu,\mu}\right)\right)t^k\right\}.$$

ここで
$$F(m,t)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i}) & \text{if } m=2n+1.\\ (1-t^n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-t^{2i}) & \text{if } m=2n.\end{cases}$$

$$P_{SO(m)}(\lambda)=\{\mu \mid \pi_{O(m)}(\mu_{SO})=sgn_{SO(m)}(\mu)\,\lambda_{SO(m)}\}$$

$\pi_{O(m)}$はspecialization homomorphism，μ_{SO}はYoung図形μに対応するuniversal character（[K-T]）

$P_{SO(m)}(\lambda)$についてはSpの場合とほとんど同じで，違いはSpの例の(3)で$2n+2$から引く所をmから引くことと，sgnの計算でsが列の入れかえの回数のみになることである。

従って，

$\overline{\lambda}=(k_1,k_2,\cdots,k_{\lambda_1},0,0,\cdots)$　，$\delta=(0,1,2,\cdots)$

$(a_0,a_1,a_2,\cdots)=\overline{\lambda}-\delta$とする。整数$(0\le)\,i_1<i_2<\cdots<i_r$に対し，

$$\overline{p^{SO(m)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda)}=(m-a_{i_r},m-a_{i_{r-1}},\cdots,m-a_{i_1},a_0,a_1,\cdots,\widehat{a_{i_1}},\cdots,\widehat{a_{i_r}},\cdots)+\delta$$

としたとき，

[命題 4.2]

$$\mathcal{P}_{SO(2n+1)}(\lambda) = \left\{ p^{SO(2n+1)}_{i_1,\dots,i_r}(\lambda) \,\middle|\, r \geq 0,\ 0 \leq i_1 < \cdots < i_r \right\}$$

$$\mathcal{P}_{SO(2n)}(\lambda) = \left\{ p^{SO(2n)}_{i_1,\dots,i_r}(\lambda) \,\middle|\, \begin{array}{l} \ell(\lambda) < n \text{ のとき } r \geq 0,\ \ell(\lambda) = n \text{ のとき} \\ r \geq 1, \qquad 0 \leq i_1 < \cdots < i_r \end{array} \right\}$$

$$sgn_{SO(m)}\left(p^{SO(m)}_{i_1,\dots,i_r}\right) = (-1)^{\sum_{j=1}^{r} i_j}$$

参考文献.

[K] K. Koike : On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups ; to appear in Adv. Math.

[K-T] K. Koike and I. Terada : Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n ; J. Algebra, 107 (1987) 466 - 511.

[Kos] B. Kostant : Lie group representations on polynomial rings ; Amer. J. Math, 85 (1963), 327-404.

[M] I.G. Macdonald : Symmetric Functions and Hall Polynomials ; Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[Ma 1] 松沢淳一 : 古典複素リー群の generalized exponents — Young 図形と universal character と Kostant の generalized exponents; 京大数理研講究録 630. (1987).

[Ma 2] J. Matsuzawa: On the generalized exponents of classical Lie groups; to appear in Comm. Alg.